Tema 3

Sucesos y probabilidad

¿Por qué hemos de estudiar la probabilidad? Las conclusiones de los análisis estadísticos de datos, vendrán generalmente dadas en términos probabilísticos (como ya se verá posteriormente en el tema 6 ⏭, hasta ahora en el tema 1 y 2 nos hemos limitado a describir los datos). La probabilidad entra en los análisis estadísticos, no únicamente porque el azar influya en los resultados de un experimento, sino también a causa de los modelos teóricos que se usarán en la parte de inferencia estadística. Para poder extraer conclusiones sobre la población, a partir de los datos de una muestra, será necesario recurrir a un modelo matemático (un esquema teórico de comportamiento) que nos determine las reglas de inferencia que es necesario utilizar. La probabilidad es el lenguaje y la fundamentación matemática de la estadística inferencial, al igual que las reglas de la gramática proporcionan las bases para organizar ideas a partir de las palabras que forman la lengua.

3.1. Espacio muestral

Espacio muestral y puntos muestrales: el espacio muestral S de una variable aleatoria X es el conjunto de valores que puede tomar dicha variable. Cada uno de los elementos de S se llama punto muestral.

✍ **Ejemplo 3.1.:** X = ”resultado al lanzar un dado”

Ejemplo 3.2.: A la hora de diseñar un paraguas, diversos factores bajo consideración serán: Sexo (Mujer/Hombre), Edad, Tipo de mango, Forma de las puntas, Plegable (Sí/No), Tonalidad, Material, Forma, Tamaño, Zona de venta (tipo de lluvia), Tipo de cierre, Automático, Resistencia de las varillas, etc. Para la variable X=”Edad” podríamos considerar tres valores, S={menor de 6 años, de 6 a 10 años, mayor de 10 años}.

✍ **Ejemplo 3.3.:** El fabricante de un automóvil proporciona vehículos equipados con distintas opciones que el cliente selecciona. Cada vehículo se solicita:

- con o sin techo corredizo

- con o sin aire acondicionado
- con una de tres opciones posibles en cuanto a sistema de sonido estéreo
- en uno de cuatro colores para el exterior: rojo, blanco, azul, negro

El espacio muestral está formado por el conjunto de todos los tipos posibles de vehículos, ¿cuál sería este espacio muestral?

Si además se ofreciera una opción más, por ejemplo, el color de los interiores (negro, café, rojo, gris), pero bajo ciertas restricciones:

- con exterior rojo, sólo es posible elegir interior negro o rojo
- con exterior blanco, puede seleccionarse cualquier color interior
- con exterior azul, sólo es posible elegir interior negro, café o gris
- con exterior negro, sólo es posible elegir interior negro

¿Cómo quedaría el espacio muestral?

Suceso: es un subconjunto A de S

✍ **Ejemplo 3.1.:** X = "resultado al lanzar un dado", A ="sacar número par"

✍ **Ejemplo 3.2.:** X ="Edad", A = "niños"

Suceso seguro: S

Suceso imposible: $\emptyset$. ✍ **Ejemplo 3.1.:**

Puesto que los sucesos son subconjuntos, es posible utilizar las operaciones básicas de conjuntos, tales como uniones, intersecciones, complementos, para formar otros sucesos de interés. Esto nos conduce a otras definiciones. Además, repasaremos las operaciones de conjuntos (álgebra de Boole), que necesitaréis el año próximo en "Metodologías del diseño". Los conjuntos y las operaciones podrán representarse mediante diagramas de Venn. El espacio muestral o universo vendrá representado por un rectángulo, mientras que los sucesos serán las regiones dentro del rectángulo.

Sucesos excluyentes o disjuntos: A y B son sucesos excluyentes o disjuntos si $A \cap B = \emptyset$.

✍ **Ejemplo 3.1.:** X = "resultado al lanzar un dado", $A =$ $B =$

✍ **Ejemplo 3.1.:** X = "resultado al lanzar un dado", $A =$ $B =$

✍ **Ejemplo 3.2.:** X = "Edad", S={menor de 6 años, de 6 a 10 años, mayor de 10 años}, $A =$ $B =$

Suceso contrario o complementario: el suceso contrario de un suceso A es aquel que se produce si y sólo si no se produce A. Se denota A^c o bien $\overline{A}$. Se cumple: $A \cup A^c = S$ y $A \cap A^c = \emptyset$.

✍ **Ejemplo 3.1.:** X = "resultado al lanzar un dado", $A =$

✍ **Ejemplo 3.2.:** X = "Edad", $A =$

Unión de dos sucesos (conjuntos) A y B, $A \cup B$: es el conjunto de todos los elementos de A, B o ambos.

Ejemplo 3.1.: X = "resultado al lanzar un dado", A = "sacar par", B ="sacar > 3", $A \cup B =$

Intersección de dos sucesos (conjuntos) A y B, $A \cap B$: es el conjunto de todos los elementos pertenecientes tanto a A como a B.

Ejemplo 3.1.: X = "resultado al lanzar un dado", A = "sacar par", B ="sacar > 3", $A \cap B =$

Las siguientes propiedades pueden confirmarse mediante diagramas de Venn.

Las uniones y las intersecciones son conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A \qquad \text{y} \qquad A \cap B = B \cap A$$

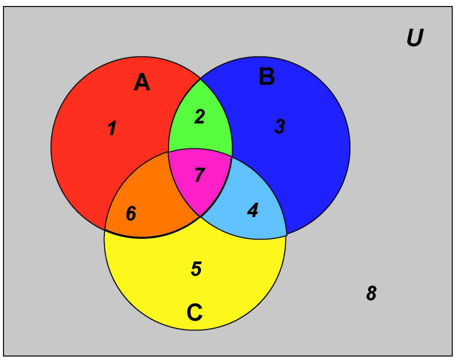
También son asociativas:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad \text{y} \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Además cada una es distributiva con respecto a la otra:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad \text{y} \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Podemos comprobarlo gráficamente en la siguiente figura:

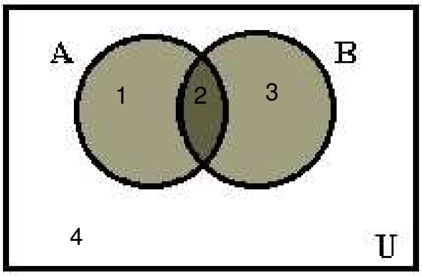


Ejemplo 3.4.: A un fabricante de frigoríficos le preocupan tres tipos principales de defectos. Llamemos A al suceso el termostato es defectuoso, B al suceso el motor falla y C al suceso el cableado es insatisfactorio. Expresemos verbalmente y mediante conjuntos los sucesos

representados por las regiones del diagrama anterior dadas por los números: (a) región 2, (b) regiones 4, 7, (c) regiones: 3, 4, 5, 8.

Leyes de DeMorgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ y $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

✍ Podemos comprobarlo gráficamente en la siguiente figura:



3.2. Definición axiomática de probabilidad. Propiedades

Sólo se introduce para espacios muestrales finitos, ya que la restricción sobre estos espacios muestrales permite simplificar los conceptos y la presentación sin hacer uso de muchas matemáticas.

Consideremos el **ejemplo 3.5**: X = "resultado al lanzar una moneda". El espacio muestral, S, es $\{cara, cruz\}$. Si la moneda no está trucada, y la lanzáramos un elevado número de veces, esperaríamos obtener la mitad de veces cara y la otra mitad cruz, con lo cual asignaríamos una probabilidad de 0.5 para cara y 0.5 para cruz.

STOP Una probabilidad es una cantidad numérica que expresa la verosimilitud de un cierto suceso A, denotada como $P(A)$ (**probabilidad del suceso** A). Este número estará **SIEMPRE** entre 0 y 1 (ambos inclusive). Sólo tiene sentido hablar de probabilidad en el contexto de un **experimento aleatorio**, es decir, una operación (proceso) cuyo resultado viene determinado al menos parcialmente por el azar. De esta forma, cada vez que se lleva a cabo una operación, el suceso A puede ocurrir o no ocurrir. Dicho de otro modo, un experimento aleatorio es aquel que proporciona diferentes resultados aun cuando se repita siempre de la misma manera.

Ejemplo 1.3.: (ratón ergonómico para niños), la variable de interés era X = "longitud del dedo índice de los niños". Sea el suceso A = "la longitud es > 6.5 cm para un niño elegido al azar". Si en la población el 30 % de los niños tiene un dedo índice de longitud > 6.5 cm, entonces la probabilidad de que un niño aleatoriamente escogido tenga un dedo > 6.5 cm (P(A)), sería de 0.3, o sea, la proporción de miembros de la población con esa característica.

La probabilidad podemos interpretarla en términos frecuenciales. Así, si el experimento aleatorio se pudiera repetir un número infinito de veces, la probabilidad del suceso A, $P(A)$, se interpretaría como la frecuencia relativa de la ocurrencia del suceso A en una serie infinita de repeticiones de dicho experimento. O sea, si ese experimento se repitiera un número grande de veces y por cada repetición anotásemos la ocurrencia o no de A, se tendría:

$$\mathrm{P(A)} \longleftrightarrow \frac{\text{número de veces que ocurre A}}{\text{número de veces que se repite el experimento}}$$

donde $\longleftrightarrow$ quiere decir: aproximadamente iguales si el experimento se repite muchas veces.

Ejemplo 3.5.: P("sacar cara") = 0.5, podéis lanzar una moneda muchas veces y comprobarla (si no está trucada, ¡claro!). De todas maneras, fíjate que para una realización concreta del experimento, quizá no obtengas exactamente la mitad de las veces cara (recuerda el ejemplo 1.4. en el punto 1.5.). De hecho, cada vez que realices el experimento la frecuencia relativa seguramente cambiará, pero tras repetirlo muchísimas veces la frecuencia relativa (empírica o experimental) tenderá a converger hacia la probabilidad teórica del suceso. La aproximación mejorará conforme más repeticiones se lleven a cabo. Las probabilidades de un experimento aleatorio a menudo se asignan sobre la base de un modelo razonable del sistema que se estudia. Otras veces, nos basaremos en los resultados de estudios realizados.

En un espacio muestral finito ($S = \{w_1, \ldots, w_n\}$), a cada punto muestral w_i le asociaremos una probabilidad entre 0 y 1 ($0 \leq p(w_i) \leq 1$) y se cumplirá $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Ejemplo 3.1.: X = "resultado al lanzar un dado"

Ejemplo 3.6.: X = "resultado al lanzar dos monedas"

Ejemplo 3.7.: Para conocer las preferencias sobre el tamaño del envase (con 3 posibles valores que denominaremos: pequeño, mediano y grande) de un cierto producto, se obtiene la valoración sobre un conjunto de clientes en potencia, obteniéndose las siguientes proporciones: 0.1 (pequeño), 0.7 (mediano), 0.2 (grande).

Probabilidad de un suceso A**:** es la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales (elementos) de A.

✍ **Ejemplo 3.6.:**

✍ **Ejemplo 3.7.:**

Si todos los puntos muestrales son equiprobables (tienen la misma probabilidad) tendremos que

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de S}}$$

✍ **Ejemplo 3.6.:**

Propiedades:

- $0 \leq P(A) \leq 1,\ A \subseteq S$
- $P(S) = 1,\ P(\emptyset) = 0$
- $P(A^c) = 1$ - $P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ - $P(A \cap B)$

✍ **Ejemplo 3.1.:**

✍ **Ejemplo 3.3.:** Según datos históricos, se ha establecido que los clientes prefieren el vehículo con T =”techo corredizo” con probabilidad 0.1 (P(T) =0.1), mientras que prefieren con A =”aire acondicionado” con probabilidad 0.93 (P(A) = 0.93). Además, sabemos que $P(A^c \cup T^c)$ = 0.94. ¿Cuál sería $P(A \cap T)$ y $P(A \cup T)$?

Además, para varios sucesos:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ - $P(A \cap B)$ - $P(A \cap C)$ - $P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Si los sucesos A_1, A_2, ..., A_k son mutuamente excluyentes, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos los pares, entonces:

$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k)$

3.3. Probabilidad condicionada

A veces, es interesante conocer la probabilidad de un suceso, restringiéndonos a una parte del espacio muestral. La probabilidad de un suceso puede cambiar, si se suministra información adicional.

La probabilidad condicionada de un suceso A, dado que otro suceso B ha ocurrido, se escribe $P(A|B)$ y se define como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{3.1}$$

[No debe confundirse $P(A \cap B)$ con $P(A|B)$, son sucesos diferentes. En caso de dificultad,

recuerda este sencillo ejemplo: considera toda la población española y los sucesos A = "ojos azules" y B = "pelo rubio". La probabilidad de tener ojos azules y pelo rubio, $P(A \cap B)$, es baja, en cambio, la probabilidad de tener ojos azules dado que se es rubio, $P(A|B)$, es más alta. En este último caso, para calcular la probabilidad $P(A|B)$, no se está considerando toda la población, si no que nos restringimos únicamente a la parte de población que es rubia.]

✍ **Ejemplo 3.1.:** Antes de lanzar un dado apostamos por el 2 (P(X = 2) = 1/6). Después de lanzar, la banca nos dice que ha salido par, ¿cuál es ahora la probabilidad de ganar?

✍ **Ejemplo 2.3.:** En este ejemplo del tema 2, se había efectuado un estudio sobre los fallos de un componente electrónico. Existían cuatro tipos de fallos posibles y dos posiciones de montaje para el dispositivo. Los datos obtenidos fueron:

	Tipo de fallo			
Posición de montaje	A	B	C	D
1	12	36	8	5
2	5	16	6	12

¿Cuánto valdría P(defecto A | posición 2)?

Otra forma de escribir la ecuación anterior es: $P(A \cap B) = P(A|B)$P(B) o bien (si se condiona a A), $P(A \cap B) = P(B|A)$P(A)

Si en lugar de 2 sucesos tuviéramos más, la ecuación anterior se convertiría en:

$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1})$

Ejemplo 3.3.: Queremos conocer la probabilidad de que un cliente seleccione el automóvil con B = "color blanco exterior", G = "gris interior" y T^c = "sin techo corredizo", sabiendo que P(B) = 0.6, $P(G|B) = 0.8$ y $P(T^c|B \cap G) = 0.95$.

3.4. Independencia

Se ha visto que $P(A \cap B) = P(A|B)$·P(B). Sólo tendremos que $P(A \cap B)$ = P(A)· P(B) cuando A y B sean independientes.

Dos sucesos A y B son independientes si $P(A|B)$ = P(A), o sea, si el conocimiento que ha sucedido B no influye en la probabilidad de A, la ocurrencia de B no tiene influencia en la ocurrencia de A. En ese caso tenemos también: P(B) = $P(B|A)$ y $P(A \cap B)$ = P(A)· P(B).

Ejemplo 3.4.: Es posible asumir que el funcionamiento (o no) del termostato no depende del funcionamiento (o no) del motor, con lo cual tendríamos que ambos sucesos son independientes. Si tras un análisis de los defectos de frigoríficos, se establece que P(A) = 0.3 y P(B) = 0.1. ¿Cuál sería $P(A \cap B)$?

Ejemplo 3.2.: Consideremos los sucesos H ="Sexo = Hombre" y N ="Tonalidad = negra", con probabilidades P(H)= 0.5, P(N) = 0.52 y $P(N|H) = 0.98$; H y N no son independientes.

✍ **Ejemplo 2.3.:** ¿Son independientes los sucesos A = "defecto A" y B = "posición 2"?

La independencia de sucesos nos puede ayudar en el cálculo de la probabilidad de diversos sucesos. Si A_1, A_2,..., A_k son independientes:

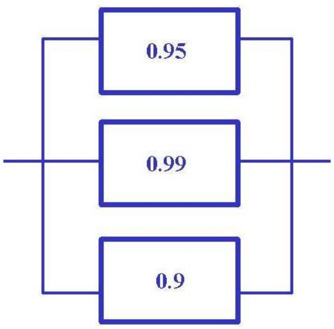
$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_k)$$

✍ **Ejemplo 3.8.:** Definimos la **confiabilidad** de un producto (componente) como la probabilidad que funcione dentro de los límites especificados por lo menos durante un período determinado de tiempo en condiciones ambientales especificadas. Por ejemplo, la confiabilidad de un neumático de automóvil es cercana a 1 en 10.000km de operación normal, pero prácticamente cero para su uso en el rally Paris-Dakar.

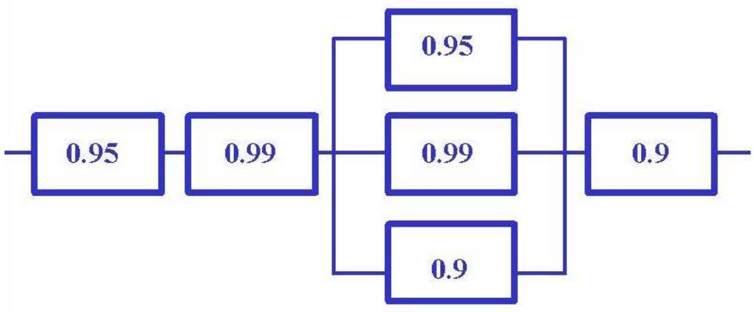
Supongamos que tenemos un sistema compuesto por diversos componentes, cada dispositivo fallando de manera independiente. Si la probabilidad de que cada dispositivo funcione, aparece en el interior de la figura, calculemos la confiabilidad, para distintas disposiciones de los componentes:

- Sistema en serie

- Sistema en paralelo



- Sistema mixto



Hay que distinguir entre independencia de sucesos e independencia de variables. Dos variables X e Y son independientes si cualquier suceso describible en términos de X, es independiente de cualquier suceso describible en términos de Y (existen otros teoremas que no veremos, para describir la independencia). A modo ilustrativo, veamos el siguiente ejemplo:

✍ **Ejemplo 3.9.:** La siguiente tabla recoge la tipología de programa de televisión preferido según tres edades: Jóvenes (de 18 a 30 años), Medianos (de 31 a 60 años), Mayores (más de 60 años). ¿Son los sucesos P = "película" y J ="jóvenes" independientes? ¿Son las variables Programa TV preferido y Edad independientes?

Edad \ Programa	Películas	Concursos	Informativos	Otros
Jóvenes	400	300	100	200
Medianos	300	150	225	75
Mayores	480	120	110	490

Para describir la asociación entre dos variables X e Y, dispuestas en una tabla de contingencia, utilizaremos el coeficiente de contingencia (existen muchas más medidas, en el Statgraphics podréis encontrar otros índices). En el tema 6, se verá cómo determinar si las variables son o no independientes.

STOP **Coeficiente de contingencia:** este índice oscila de 0 a 1, aunque en la mayoría de los casos no alcanza el valor 1, porque el valor máximo depende del número de filas y columnas.

Cuanto más cercano a 1 sea, mayor será el grado de relación entre las variables.

Para la tabla de contingencia siguiente:

X \ Y	y_1	...	y_j	...	y_c	Total
x_1	o_{11}	...	o_{1j}	...	o_{1c}	$T_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_i	o_{i1}	...	o_{ij}	...	o_{ic}	$T_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_r	o_{r1}	...	o_{rj}	...	o_{rc}	$T_{1.}$
Total	$T_{.1}$	...	$T_{.j}$	...	$T_{.c}$	T

$T_{i.}$ es el total de observaciones de la fila i-ésima, $T_{.j}$ es el total de observaciones de la columna j-ésima y T es el total de observaciones.

El coeficiente de contingencia es:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}} \tag{3.2}$$

donde χ^2 se calcula de la siguiente forma:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}, \tag{3.3}$$

siendo $e_{ij} = T_{i.} \cdot T_{.j}$ / T

✍ **Ejemplo 2.3.:**

3.5. Teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes

Algunas veces no disponemos de la información al completo, tal vez se conocen las probabilidades condicionales, pero se desean calcular otras diferentes, por ello consideraremos los siguientes resultados.

Teorema de la probabilidad total: Sea A un suceso que se presenta siempre asociado a uno de los sucesos B_1, B_2, ..., B_n mutuamente excluyentes en que se particiona el espacio muestral S, es decir, $\cup_{i=1}^{n} B_i = S$ y $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todos los pares. Si se conocen las probabilidades $P(B_i)$ y $P(A|B_i)$, se cumple:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i) \tag{3.4}$$

Ejemplo 3.10.: La irregularidad del corte de productos de papel aumenta a medida que las hojas de la cuchilla se desgastan. Sólo el 1 % de productos cortados con cuchillas nuevas tienen cortes irregulares, el 3 % de los cortados con cuchillas de filo promedio exhiben irregularidades y el 5 % de los cortados con cuchillas desgastadas presentan irregularidades. Si el 25 % de las cuchillas utilizadas en el proceso de corte son nuevas, el 60 % tiene un filo promedio y el 15 % de las cuchillas están desgastadas, ¿cuál es la proporción de productos que tendrán cortes irregulares?

Si seleccionamos un producto al azar y resulta que presenta un corte irregular, ¿cuál sería la probabilidad que hubiera sido cortado con una cuchilla nueva?

Teorema de Bayes Sea A un suceso que se presenta siempre asociado a uno de los sucesos B_1, B_2, ..., B_n mutuamente excluyentes en que se particiona el espacio muestral S. Si se conocen las probabilidades $P(B_i)$ y $P(A|B_i)$, se cumple para 1 ≤ k ≤ n:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)} \tag{3.5}$$

✍ **Ejemplo 3.11.:** Para la fabricación de un gran lote de artículos similares se usan 3 máquinas: M_1, M_2, M_3. M_1 fabrica el 20 % de la producción, M_2 fabrica el 30 % y M_3 el 50 %. M_1 fabrica un 1 % de artículos defectuosos, M_2 un 2 % y M_3 un 3 %. Se selecciona un producto al azar y resulta que es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por M_3?

Problemas del tema 3

Ejemplo En una fábrica el 80 % de jarras de cristal lo produce la máquina 1 y el 20 % la máquina 2. Una jarra es defectuosa si tiene burbujas de aire o algún cuerpo extraño o ambas cosas. Estos defectos ocurren independientemente el uno del otro. El 5 % de la producción de la máquina 1 tiene burbujas de aire y el 2 % tiene algún cuerpo extraño. El 1 % de la producción de la máquina 2 tiene burbujas de aire y el 3 % tiene algún cuerpo extraño.

1. ¿Cuál es la probabilidad que una jarra fabricada por la máquina 1 sea defectuosa?
2. Se toman 10 jarras fabricadas por la máquina 1: ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas sea defectuosa?
3. ¿Qué porcentaje de la producción total de jarras será defectuosa?
4. Si una jarra tiene burbujas de aire pero ningún cuerpo extraño, ¿cuál es la probabilidad que haya sido fabricada por la máquina 1?

"jarra fabricada por Máquina 1" = M_1 , "jarra fabricada por Máquina 2" = M_2, "jarra con burbujas" = B, "jarra con algún cuerpo extraño" = C, "jarra defectuosa" = D (B $\cup$ C = D, B y C independientes) P(M_1)=0.8, P(M_2)=0.2, P(B| M_1)=0.05, P(B| M_2)=0.01, P(C| M_1)=0.02, P(C| M_2)=0.03

1. P(D| M_1)= P(B $\cup$ C | M_1) = P(B|M_1) + P(C| M_1) - P(B $\cap$ C | M_1) = P(B| M_1) + P(C| M_1) - P(B| M_1)· P(C| M_1)= 0.05+0.02-0.05· 0.02=0.069
2. P(D^c| M_1)=1 - P(D| M_1)= 1 - 0.069 (probabilidad que una jarra fabricada por la máquina 1 no sea defectuosa)

   P(10 jarras de M_1 no sean defectuosas)=(1 - 0.069)^{10}
3. Por el teorema de la probabilidad total: P(D)=P(D| M_1)P(M_1)+P(D| M_2)P(M_2)

   P(D| M_2)= P(B $\cup$ C | M_2) = P(B| M_2) + P(C| M_2) - P(B $\cap$ C | M_2) = P(B| M_2) + P(C| M_2) - P(B| M_2)·P(C| M_2)= 0.01+0.03-0.01·0.03=0.0397

   P(D)=P(D| M_1)P(M_1)+P(D| M_2)P(M_2)=0.069·0.8 + 0.0397·0.2=0.0552+0.00794= 0.06314. El 6.314 % son defectuosas
4. P(M_1 | B $\cap$ C^c) $=\frac{P(M_1 \cap B \cap C^c)}{P(B \cap C^c)} = \frac{P(B \cap C^c | M_1) P(M_1)}{P(B) \cdot P(C^c)} = \frac{P(B|M_1) \cdot P(C^c|M_1) P(M_1)}{P(B) \cdot P(C^c)}$

   P(B)=P(B| M_1)P(M_1)+P(B| M_2)P(M_2)=0.05·0.8+0.01·0.2=0.042

   P(C)=P(C| M_1)P(M_1)+P(C| M_2)P(M_2)=0.02·0.8+0.03·0.2

   P(C^c)=1-P(C)=0.978

P(C^c | M_1)=1 - P(C| M_1)=1 - 0.02 = 0.98

P(M_1 | B $\cap$ C^c) $=\frac{0{,}05\cdot 0{,}8\cdot 0{,}98}{0{,}042\cdot 0{,}978} = \frac{0{,}0392}{0{,}04108}$=0.9543

1. La probabilidad que un cinturón de seguridad defectuoso sea identificado como a tal en un control de calidad es de 0.995, mientras que la probabilidad que un cinturón en perfectas condiciones sea identificado como defectuoso por el sistema de control es 0.001. Se sabe que el proceso de fabricación resulta, en promedio, a un cinturón defectuoso por cada 500 fabricados. Determina:

    a) La probabilidad que un cinturón identificado por el control como defectuoso lo sea realmente.
    b) La probabilidad que no sea defectuoso un cinturón que pase el control.
    c) La máxima proporción de cinturones defectuosos fabricados que permitiría que la probabilidad que un cinturón que pase el control, no sea defectuoso, sea, al menos, 0.999.

    (Sol. : 0.666, 0.99999, 0.1667)

2. El examen teórico de conducir es un test con 4 posibles respuestas por pregunta. Se supone que el aspirante a conductor/a conoce la respuesta correcta con probabilidad 0,6 y, por tanto, marca una respuesta al azar con probabilidad $1 - 0{,}6$. Determina la probabilidad que haya contestado al azar, sabiendo que su respuesta ha sido correcta.

    (Sol. : 0.1429)

3. ([1]) En la lotería primitiva cada juego consiste en seleccionar 6 números del 1 al 49. El día del sorteo se obtienen los seis números ganadores más otro número conocido como el complementario. Obtienen el primer premio aquellos boletos cuyos seis números coinciden con los seis números ganadores, y obtienen el segundo premio si cinco de los números del boleto son números ganadores y el otro coincide con el complementario. Calcula las probabilidades de obtener el primer y el segundo premio si jugamos un boleto de la lotería primitiva.

    (Sol. : $7.15 \cdot 10^{-8}$, $4.29 \cdot 10^{-7}$)

4. ([2]) En un grupo de 50 personas, ¿cuál es la probabilidad que cada una de ellas cumpla los años en un día diferente del año? y ¿cuál es la probabilidad que al menos dos personas cumplan los años el mismo día?

    (Sol. : 0.883, 0.117)

[1] Combinatoria, complementos del tema 3

[2] Combinatoria, complementos del tema 3

5. El 5 % de las unidades producidas en una fábrica son defectuosas cuando el proceso de fabricación se encuentra controlado. Si el proceso se encuentra fuera de control, se producen un 30 % de unidades defectuosas. La probabilidad que el proceso se encuentre controlado es de 0.92. Si seleccionamos al azar una unidad y resulta que es defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que el proceso se encuentre controlado?

   (Sol. : 0.657)

6. Una planta armadora recibe circuitos provenientes de tres fabricantes: A, B, y C. El 50 % del total se compra a A, el 25 % a B y el otro 25 % a C. El porcentaje de circuitos defectuosos para A, B, y C son respectivamente: 5, 10 y 12 %. Si los circuitos se almacenan en la planta sin importar la procedencia:

   a) Determina la probabilidad que una unidad armada de la planta contenga un circuito defectuoso.

   b) Si un circuito no es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad que haya sido vendido por B?

   (Sol. : 0.08, 0.245)

7. ([3]) De una baraja con 40 cartas se extraen dos. ¿Cuál es la probabilidad que ambas sean as? y ¿qué alguna al menos sea as (complementario de ninguna de ellas es as)?

   (Sol. : 0.00769, 0.1923)

8. Un test para la detección de defectos en la fabricación de unas piezas tiene un 2 % de falsos positivos (el test responde que hay defectos cuando en realidad no hay) y un 3 % de falsos negativos (el test responde que no hay defectos cuando en realidad sí hay). Si se fabrica una pieza defectuosa por cada 5000 fabricadas, ¿cuál sería la probabilidad que una pieza que ha dado positivo en el test fuera realmente defectuosa?

   (Sol. : 0.3288)

9. Jurassic Petroleum ha clasificado los suelos en tres tipos (A, B y C), según las posibilidades de descubrir petróleo. La compañía perfora un pozo en un lugar, que tiene probabilidades 0.35, 0.55 y 0.10 de pertenecer a cada uno de los tres tipos de suelo, respectivamente. De acuerdo con la experiencia, hay petróleo en un 40 % de perforaciones en el suelo A, en un 25 % de perforaciones en el suelo B y en un 30 % de perforaciones en suelo C. Si no hay petróleo en el pozo perforado, ¿cuál es la probabilidad que el pozo se encuentre en un suelo B?

   (Sol. : 0.5957)

10. La administración de un país colonizado hace un referéndum sobre la instalación de mísiles extranjeros en su territorio. A la salida de un colegio electoral, una empresa de sondeos pide (anónimamente) a los votantes que han votado. Se sabe de otros referéndums similares que si un votante ha votado 'no' contesta la verdad en un 40 % de los casos, mientras que si ha votado 'sí' contesta la verdad en un 95 % de los casos. Al hacer el escrutinio del colegio, se

[3] Combinatoria, complementos del tema 3

ve que hay un 70 % de votos negativos. Si un votante ha contestado 'no' a la empresa de sondeos, ¿cuál es la probabilidad que haya votado 'no'?

(Sol. : 0.949)

11. La probabilidad de que el chip de un circuito integrado tenga un grabado defectuoso es de 0.12, la probabilidad de que tenga un defecto de cuarteadura es de 0.29 y la probabilidad de que tenga ambos defectos es de 0.07.

    a) ¿Qué probabilidad hay de que un chip de fabricación reciente tenga un defecto de grabado o de cuarteadura?
    b) ¿Y de que no tenga ninguno de esos defectos?

    (Sol. : 0.34, 0.66)

12. Al estudiar una muestra de 1000 personas clasificadas en fumadores y no fumadores, con o sin problemas en las vías respiratorias, se obtuvo:

	E = "Enfermos"	E^c = "No Enfermos"
F = "Fumadores"	183	289
F^c = "No Fumadores"	56	472

    Según esos datos, ¿son independientes los sucesos F y E? Calcula también el coeficiente de contingencia e interprétalo.

    (Sol. : No, 0.3131, las variables están relacionadas)

13. En una fábrica de bombillas, tres máquinas A, B y C suministran respectivamente el 25 %, 35 % y 40 % de la producción. Los porcentajes de bombillas defectuosas producidos por cada máquina son, respectivamente 6 %, 3 % y 2 %. Calcúlese la probabilidad de que una bombilla elegida al azar

    a) sea defectuosa y fabricada por A
    b) sea defectuosa y fabricada por B
    c) sea defectuosa y fabricada por C
    d) sea defectuosa
    e) no sea defectuosa
    f) sabiendo que es defectuosa, haya sido fabricada por A

    (Sol. : 0.015, 0.0105, 0.08, 0.0335, 0.9665, 0.4478)

14. **ESPERANZA MATEMÁTICA**

    Ejemplo: Un distribuidor obtiene una ganancia de 20 € de un artículo si se le embarca de la fábrica en perfectas condiciones y se entrega a tiempo, dicha ganancia se reduce en 2 € si el artículo no es entregado a tiempo, y en 12 € si no se le embarca en perfectas condiciones. Si el 70 % de los artículos se embarcan en perfectas condiciones y se entregan a tiempo, el 10 % se embarca en perfectas condiciones pero no se entrega a tiempo y el 20 %

no se embarca en perfectas condiciones, ¿cuál es la ganancia esperada por artículo?

$$20 \cdot 0.7 + 18 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.2 = 17.4 \text{ €}$$

Si las probabilidades de obtener cantidades a_1, a_2, ..., a_k son p_1, p_2, ..., p_k, la esperanza matemática es: E = $a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + ... + a_k \cdot p_k$

(las a pueden ser positivas o negativas según representen ganancias o pérdidas)

Problema: el costo de prueba de cierto componente de una máquina es 60 €. Si se instala un componente defectuoso, el costo de reparación del daño resultante para la máquina es de 1200 €. ¿Es más rentable instalar el componente sin prueba si se sabe que

a) el 3 % de todos los componentes producidos son defectuosos?
b) el 8 % de todos los componentes producidos son defectuosos?

(Sol. : Sí; No)

15. Un consumidor que realiza pruebas de servicio clasifica podadoras de césped según sean fáciles, promedio o difíciles de manejar, de alto o bajo costo y de alto, promedio o bajo costo de reparación. ¿De cuántas maneras distintas podría clasificarse una podadora con esta prueba de servicio? (diagrama de árbol).

Por otro lado, se entrevistó a 200 personas sobre una podadora, obteniéndose:

	Manejo		
Costo	F = "Fácil"	P = "Promedio"	D = "Difícil"
A = "Alto"	45	10	11
B = "Bajo"	61	40	33

Calcula: P(B), P(F), $P(B|F)$, $P(F \cup P)$, $P((F \cup P) \cap B)$, $P(F \cup P|B)$, $P(F \cup B)$, ¿son independientes los sucesos A y F?, ¿cuánto vale el coeficiente de contingencia? Interprétalo.

(Sol. : 0.67, 0.53, 0.58, 0.78, 0.505, 0.754, 0.895, No, 0.2117 las variables están relacionadas)

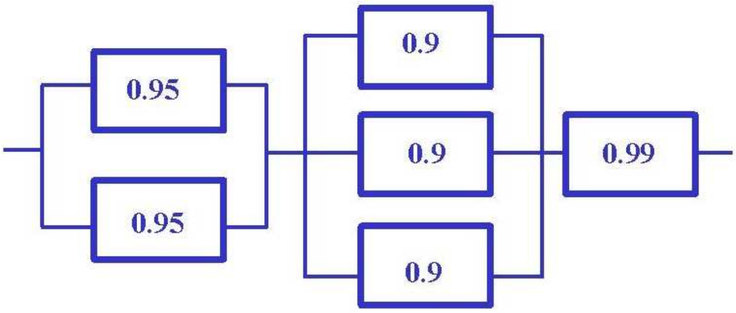
16. A continuación se presenta un resumen de la información obtenida de una muestra de 200 partes maquinadas.

	Condición de la arista	
Profundidad de barrenado	A = "Mayor de la necesaria"	N = "menor de la necesaria"
B = "Burda"	15	10
M = "Moderada"	25	20
S = "Suave"	60	70

Calcula: $P(M \cap N)$, $P(M \cup N)$, ¿cuál es la probabilidad de que la parte seleccionada no tenga una condición moderada en la arista o que no tenga una profundidad de barrenado menor que la requerida?, $P(M|N)$, ¿son independientes M y N?, calcula el coeficiente de contingencia e interprétalo.

(Sol. : 0.1, 0.625, 0.9, 0.2, No, 0.1072 las variables no están relacionadas)

17. El circuito siguiente trabaja sólo si existe una trayectoria de dispositivos en funcionamiento, de izquierda a derecha. La probabilidad de que cada dispositivo funcione, aparece en la figura. Supongamos que los dispositivos fallan de manera independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito trabaje?



(Sol. : 0.987)